Étude comparative des manuels de maths de Suisse et d'Iran, au niveau 11H :

À la recherche d'une didactique mathématique en algèbre adaptée

« Concevoir ne peut se limiter à la partie émergée de l'iceberg, il y a tout le reste en dessous, la partie immergée, qui détermine l'équilibre et la stabilité de ce qu'il y a au-dessus. » (Musial et al., 2012).

Sayeh Hosseinian

Mémoire professionnel

Directrice du mémoire : J. Candy

Résumé

Les mathématiques sont souvent considérées comme la « bête noire » des disciplines enseignées pour certains apprenants. Ayant effectué une majeure partie de ma scolarité en Iran où s'est éveillée ma passion pour les maths et enseignant depuis plusieurs années en Suisse, je me suis astreinte à comprendre si des différences entre les manuels officiels d'Iran et de Suisse de cycle 3 avaient un impact sur la construction des connaissances des élèves en mathématiques, à l'aide de l'analyse praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

Mots clés

- Didactique des mathématiques
- Approche anthropologique
- Praxéologie
- Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)
- Ingénierie didactique en mathématique
- Manuels de mathématiques
- Suisse et Iran

Table des matières

Introduction

« Mathématique, ma chère terreur » ! Voici comment Anne Siety dépeint la crainte qui règne autour de cette discipline dans son ouvrage éponyme (Siety, 2003). L'auteure a particulièrement mis en exergue ce voile de peur et d'angoisse qui recouvre les mathématiques, plus que d'autres enseignements. Cela, nous autres enseignants, nous y sommes confrontés lors des parcours scolaires propres à chaque élève. Difficultés d'apprentissage, absence de motivation ou perte de confiance en soi – notamment chez les filles – sont le lot commun des enseignants en mathématiques. Il n'est pas rare d'entendre des déclarations fatalistes du type « je suis nul en maths », « de toute façon je ne comprends rien », « je ne suis pas fait pour ça », auxquelles il est parfois difficile de trouver les réponses adéquates et surtout, les raisons sous-jacentes.

En tant que passionnée de mathématiques depuis mes études en Iran, je m'interroge sur ce découragement et même parfois ce dégoût que certains élèves portent à ma *bien aimée*. Bien que je n'aie pas eu de prédispositions particulières – je n'avais initialement pas une grande aisance dans ce domaine – je suis devenue *addict* à force d'exercer les maths et spécifiquement l'algèbre.

Cet intérêt provient d'une admiration particulière que j'entretiens pour le père de l'algèbre, Al-Khwarizmi (v. 800-v. 847). Grand mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre des Maisons de la sagesse, il a créé l'algorithme et introduit en Occident la numération décimale. Célèbre également pour son ouvrage « Kitab ai-jabr wa al-muqâbala » (Le livre du rajout et de l'équilibre) (Le Blog De L'UIA, s.d.), rédigé entre 813 et 833, ce dernier pose les bases des méthodes algébriques de résolution des équations ainsi qu'une synthèse des règles héritées des Grecs et des textes néo-persans. En grande partie, l'ouvrage traite de problèmes de la vie courante (partages d'héritage, droits de succession, échanges commerciaux, arpentages des terres…), ce qui a donné pour moi du sens aux mathématiques.

Mon choix personnel s'est porté naturellement vers l'algèbre que j'apprécie autant que certains élèves la détestent, ce qui m'a mené à plusieurs interrogations. Qu'est-ce qui explique que les mathématiques soient la discipline considérée comme la « bête noire » ? Comment se fait-il que certains étudiants la redoutent alors que d'autres, comme la brillante mathématicienne Maryam Mirzakhani reçoive la médaille Fields ? Est-ce que la formulation et la répartition des tâches ont un impact sur la motivation et l'apprentissage des élèves ? Y a-t-il des limites dans les tâches d'algèbre des écoles en Suisse en comparaison à celles d'Iran ?

On interrogea le père de l'algèbre sur l'homme.

Ce dernier a répondu humblement :

« Si l'homme est éthique et plein de morale, c'est = 1 ;

S'il est en plus charmant, on lui ajoute un zéro, c'est = 10,

S'il est riche, on lui ajoute un autre zéro, c'est = 100,

S'il est d'origine noble, on lui ajoute un autre zéro et c'est = 1000,

Si la valeur morale (nombre 1) de cette personne disparaît, il ne lui reste que zéros qui n'ont aucune valeur. »

De ces questions découle mon intérêt de comprendre les raisons sous-jacentes de ce blocage. Ainsi, dans le cadre de ce mémoire, l'objectif sera de considérer la manière dont cette branche est enseignée à l'école secondaire en Suisse et en Iran, en analysant les différences et similitudes des dispositifs d'enseignement officiels de ces deux pays – les manuels – afin de définir l'enseignement le plus adapté. La question de recherche qui fera office de fil rouge de ce travail est la suivante : **de quelle manière sont construits les exercices d'algèbre au niveau 11H des écoles en Suisse en comparaison à celles d'Iran (équivalant de 9ème) ?**

Dans un premier temps, le cadre conceptuel pour l'analyse des manuels sera présenté afin de formuler la problématique et les hypothèses de départ. Ces dernières permettront dans un troisième temps de déterminer la méthodologie adaptée. Par la suite, le corpus d'analyse relatif aux tableaux d'observation des manuels sera introduit en vue procéder à leur analyse et nous permettant *ipso facto* une analyse comparative. Les limites de la portée de cette recherche seront considérées avant finalement de conclure sur les apports de cette dernière et son prolongement possible.

Cadre conceptuel pour l’analyse des manuels

Le cadre conceptuel du mémoire sera construit en trois parties mobilisant trois approches fécondes pour notre étude.

Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques

Dans le cadre de notre étude, la didactique est un concept clé à définir puisqu’il nous sera utile dans la comparaison des manuels et par la suite dans l’évaluation de la pratique enseignante. En cherchant la définition de la didactique, apparaît l’idée d’Adrien Douady, grand mathématicien français, selon qui : « La didactique des mathématiques est l'étude des processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science décrivant et expliquant les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage » (Douady, 1994, cité dans Artigue, 1990, s.p.). Cette science ayant évolué, elle s’intéresse davantage à « comment enseigner ? » ou « comment apprendre ? ». En vue d’appréhender cette évolution, porter un regard sur l’objet d’apprentissage et l’analyse de son rôle sur la transposition de savoirs est indispensable pour un enseignant.

Afin d’élargir notre champ d’analyse, nous avons choisi de mettre en exergue l’exercice du mathématicien Yves Chevallard qui a révolutionné la didactique. En effet, il a non seulement développé des techniques d’enseignement en mathématiques riches, mais il a également mis en évidence la complexité des individus qui deviennent des *personnes* et la difficulté qu’elles provoquent sur le système d’enseignement. Il a notamment apporté un nouvel éclairage sur les types de savoirs en les distinguant et en les définissant, ce qui est capital sachant que « (…) l’analyse des savoirs mathématiques doit aller de pair avec l’étude des pratiques institutionnelles où ces savoirs sont créés, développés, utilisés, diffusés, enseignés et appris. ». (Wozniak et al., s.d., s.p.)

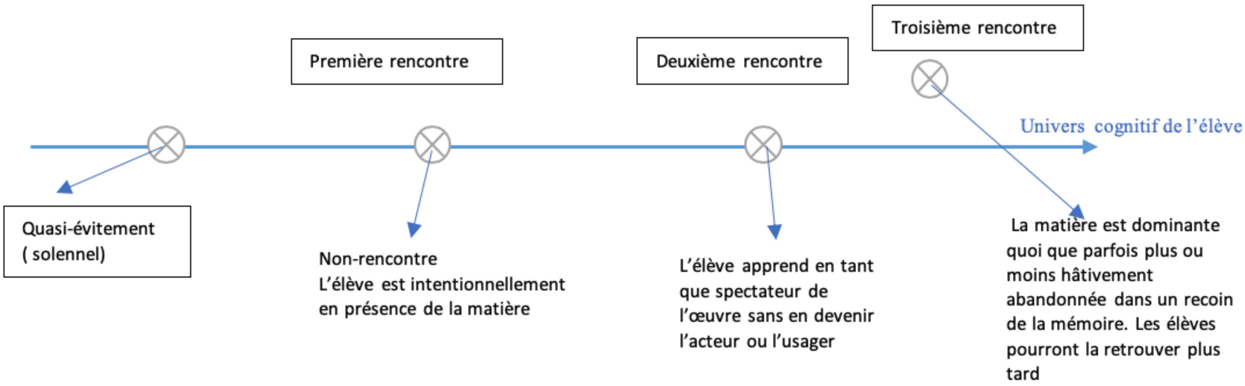
En vue de ses apports remarquables à la didactique des mathématiques, une attention particulière sera dédiée à son ouvrage « Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques ». En effet, il y présente plusieurs notions fondamentales qui nous permettront de déterminer notre axe/vecteur de recherche :

- L'objet (o) qui est l'origine de la théorie anthropologie de la didactique ;
- Le rapport personnel d'un individu à un objet (R (x, o)) ;
- Un individu et ses systèmes rapports personnels ;
- L'institution (I) en tant que dispositif social.

Pour résumer de manière concise sa thèse brillante, nous pouvons définir qu'en vue de faire apprendre quelque chose à quelqu'un, il faut entrer dans son univers cognitif qui est un ensemble non-vide d'objets et des rapports de personnes avec ces objets ; « *On appelle alors univers cognitif de x l'ensemble* $U(x) = \{(o, R(x, o)) / R(x, o) \neq \emptyset\}$. » Dans cet ensemble, tous les objets en font partie de la même manière, par exemple ma brosse à dent, la notion d'équation du second degré ou celle de père (Chevallard, 1985) et donc le rapport de la personne avec ses objets constitue son univers cognitif qui peut changer. En effet, un rapport *R* entre la personne *x* et l'objet *o* peut créer, former ou, éventuellement, évoluer à tout le moment. Pour argumenter son idée, il introduit la notion d'institution *I,* étant un dispositif social possédant un développement très réduit dans l'espace social qui est caractérisé par différentes positions et des manières de faire qui lui sont propres.

Cette théorie peut être transposée à notre étude, puisqu'on peut imaginer l'élève comme une personne avec ses rapports personnels (non vides) différents et l'exercice mathématique comme un objet ; on peut considérer la relation de l'exercice (o) avec l'élève (x), et le manuel comme position (I). Par conséquent, l'élève appréhende l'objet (o) à travers ses types de rapports rassemblés dans son univers cognitif (non vide). Plus précisément, si nous reprenons la source de notre intérêt pour ce choix d'étude présenté dans l'introduction, à savoir l'analyse des manuels de mathématiques, nous pouvons appliquer ces concepts à notre étude.

Pour ce faire, nous allons articuler ce théorème avec l'univers cognitif de l'élève à travers un exemple concret. Ainsi, dans le cas où l'élève en classe est confronté pour la première fois à un chiffre par la lettre « a » ou « x », il se peut qu'il réclame l'existence inutile de cette lettre dans les maths. Et ce moment historique est exactement le moment pour créer la relation avec cet objet, lors duquel intentionnellement l'univers cognitif de l'élève est en train de changer et d'évoluer. Par l'analyse des manuels, nous allons déterminer à partir de quel moment le rapport a été créé tout en statuant sur son impact sur l'apprentissage de cette thématique des élèves. Comme nous le remarquons dans le schéma ci-dessous, inspiré de l'idée originale de Chevallard (Wozniak et al., s.d.), la deuxième rencontre avec le thème du calcul littéral ne compte même pas comme une rencontre pour l'élève ; ce dernier est un simple spectateur sans devenir l'acteur de l'œuvre, contrairement à l'enseignant pour qui la matière est déjà assimilée et qui attend que l'élève fasse l'exercice directement. Cela peut donc créer un malentendu ou même un mismatch entre les deux protagonistes : alors que le professeur avance son cours puisque les élèves ont déjà une base préalable car vue en classe, les élèves quant à eux se retrouvent immergés dans une matière qui leur paraît inconnue. Ils ont l'impression d'avoir pris le bateau en route alors que le capitaine de bord a déjà enclenché la vitesse de croisière.



Cette conception remet en cause notre technique d'enseignement et encourage l'analyse du contenu, de la répartition et de la disposition des manuels en fonction des programmes ou des niveaux de scolarité des élèves afin de déterminer la didactique mathématique la plus cohérente pour leur apprentissage.

Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

Pour comparer les manuels, nous nous inspirerons de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Yves Chevallard afin de développer un modèle d'analyse. Brièvement, cette théorie a été créée dans la continuité de la transposition didactique, « (...) dans un positionnement d'émancipation épistémologique et institutionnelle par rapport aux institutions dans lesquelles vivent les objets de savoir qu'étudie la didactique des mathématiques » (ARDM, s.d., s.p.). Selon Chevallard (s.d.), les savoirs sont le produit de constructions humaines ; il n'y a donc pas de « allant de soi ». Le didacticien, qui vit au sein d'institutions dont il est lui-même un sujet, doit se distancer de ses propres assujettissements afin de rester en alerte en se vouant à « (…) étudier les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des institutions humaines » (Chevallard, 2007, p. 719). En effet, la TAD définit la didactique comme étant « la science des conditions et des contraintes de la diffusion sociale des praxéologies » (Chevallard, 2009, p. 5) et par voie de conséquence, les mathématiques, comme toutes les sciences, ont pour objet d'étude un certain type de conditions et de contraintes de la vie des sociétés (Ibid, 2009). La TAD distingue la notion de condition de celle de contrainte, la première renvoyant à « (...) une condition regardée, depuis une certaine position institutionnelle à un certain instant, comme non modifiable (...) » et s'apparentant à une « (...) contrainte jugée modifiable en ce même sens. » (Ibid, 2009, p.5).

La notion de praxéologie utilisée dans la TAD est centrale et marque l'évolution de la pensée de Chevallard ; la théorie de la transposition didactique étant la première étape historique de la TAD (Ibid, 2009). Le concept de praxéologie a ainsi été introduit par Yves Chevallard pour modéliser la connaissance en se distançant des notions couramment utilisées, celle de savoir ou de savoir-faire en français et de *skills* en anglais, tout en s'affranchissant des limitations imposées par la référence à un statut particulier de la connaissance du fait de sa présence en telle ou telle institution, savante ou non (Ibid, 2009).

En somme, la Théorie Anthropologique du Didactique peut se concevoir comme une théorie didactique émancipatrice des assujettissements institutionnels, se fondant sur le refus de valider les constructions intellectuelles naturalisées communément, la relativité des formes de connaissance et l'affirmation de la nécessité pour le didacticien d'être dans une position réflexive et de faire un « pas de côté » (ARDM, s.d.). En ce sens, la TAD est l'outil de modélisation et d'analyse de ces activités humaines, qui permettent de contrôler les assujettissements implicites que toute institution porte sur les pratiques qu'elle abrite, sachant que la didactique est centrée en tout premier lieu sur la didactique créée dans la classe (Ibid, 2009, p.5). C'est cette volonté de rupture épistémologique qui a permis de mettre en évidence les phénomènes de transposition didactique et de considérer pleinement l'enjeu didactique (Ibid, 2009).

Dans le cadre de ce mémoire, nous appliquerons plus précisément la TAD aux mathématiques. Dans cette perspective, la théorie anthropologique du didactique situe l'activité d'étude en mathématiques dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales tout en considérant certains objets bien distincts comme les mathématiques, les enseignants, les élèves et les manuels (Chevallard, s.d.). Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué, la praxéologie est un élément central de la TAD qui remplace dans la vie courante « toute structure de connaissances possibles » (Ibid, 2009, p.4) et qui comprend les notions suivantes.

- **Type de tâches (*T*)** : il s'agit d'une mise en pratique particulièrement simple dans un contexte concernant un objet relativement précis comme par exemple calculer la valeur d'une fonction (Chevallard, s.d.). Ces types de tâches sont des artefacts, des construits institutionnels qui ne sont pas innés mais sans cesse reconstruits et c'est ce qui en fait un objet de didactique.

- **Technique (τ)** : la technique est une manière d'accomplir et de réaliser des tâches T. Chaque type de tâche T donnée contient une telle manière de faire (technique) et la praxéologie relative au type de tâche T contient donc une technique τ relative à T. Chevallard (s.d.) nomme un « bloc » $[T/\tau]$ bloc *pratico-technique* qui correspond couramment au savoir-faire. Il est par ailleurs important de noter que cette technique τ est relative (elle ne réussit que sur une partie) et qu'elle peut être supérieure à une autre. En outre, Chevallard (s.d.) mentionne qu'elle n'est pas nécessairement algorithmique bien qu'il semble exister une tendance générale allant dans cette perspective. En dépit d'une pluralité de techniques possibles, la plupart du temps, dans les Institutions (I), seul un petit nombre de ces dernières sont reconnues institutionnellement comme seule manière de faire, et apparaît l'illusion qu'elles sont innées et naturelles. Par contraste, toutes autres techniques alternatives, bien que fonctionnelles, sont considérées comme artificielles, parfois inacceptables, et sont exclues par le choix de l'Institution. Une technique présentée comme seule manière de faire à un élève à un moment donné est comme « figée », dans le sens qu'il est difficile par la suite de lui proposer une autre technique.

- **Technologie (θ)** : cette notion renvoie à un discours et à une explication sur la technique qui la rend intelligible. En effet, la technologie justifie la technique en assurant que telle type de tâches peut être réalisée par cette technique τ. Généralement, les technologies sont sous forme de définition, propriété, théorème (à l'instar du théorème de Thalès ou de Pythagore), etc. Par ailleurs, Chevallard (s.d.) distingue deux fonctions de la technologie θ ; la première *justifie* la technique τ et la deuxième expose *pourquo*i il en est bien ainsi. Par exemple, dans un problème d'équation, les élèves appliquent le théorème de Pythagore qu'ils ont déjà appris pour résoudre l'équation sans demander la démonstration du théorème à l'enseignant.

- **Théorie (Θ)** : la théorie fait exister la technologie. Il s'agit d'un niveau supérieur de justification qui « (...) reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique. » (Chevallard, s.d., p.4). Celle-ci n'est pas statique puisque fluctue historiquement et est toujours soumise au progrès théorique bien que dépendante de l'institution. Ainsi, la technologie et la théorie se présentent elles aussi sous forme de bloc, que Chevallard (s.d.) nomme « bloc » $[\theta / \Theta]$ *technologico-théorique* qui correspond au savoir dans le sens courant du terme.

- **Savoir-faire et savoirs :** le savoir correspond au bloc « technologie » et « théorie » [θ / Θ], nommé *technologico-théorique* tandis que le savoir-faire renvoie au bloc « type de tâche » et « technique » [T/τ], appelé bloc *pratico-technique*. La structure praxéologique la plus simple qui est nommée praxéologie ponctuelle se compose des deux blocs précédents et est présentée sous cette forme [$T/\tau/\theta/\Theta$]. Chevallard (2009) met par ailleurs en évidence que dans une perspective anthropologique, « il n'existe pas de praxis qui ne soit accompagnée d'un logos, même si, depuis la position institutionnelle qu'occupe tel observateur (professeur mis devant des praxéologies d'élèves (...), cette partie technologico-théorique semble absente, parce qu'elle en fait non visible (ou mal visible). » (Chevallard, 2009, p.4).

Ingénierie didactique

L'enseignant est dirons-nous, une sorte d'ingénieur. En effet, en traitant des problèmes complexes, il dirige une classe, anime ses élèves dans une direction d'apprentissage, réalise des processus nécessaires et détaillés, invente un système, des produits ou des services pédagogiques dans une classe/une leçon, analyse avant et après la réalisation de cette leçon – son œuvre – tout en prenant compte des facteurs sociaux de ladite classe. De ce fait, il est un ingénieur didactique.

L'ingénierie didactique est le moteur de la progression didactique, elle « (…) désigne l'activité de conception de situations d'enseignement. Elle correspond à ce que les Anglo-Saxons appellent instructional design et que nous appelons parfois, en francophonie, l'ingénierie pédagogique. » (Artigue, 1990, s.p.).

Notre étude a besoin d'observations comprenant des analyses méticuleuses à chaque phase afin de scruter les manuels. C'est pourquoi, nous nous tournerons vers la méthodologie d'ingénierie didactique puisqu'elle comporte la rigueur scientifique désirée.

Dans son ouvrage « Ingénierie didactique en mathématiques », Artigue (1990) a développé les quatre différentes phases d'ingénierie didactique, à savoir : 1) analyses préalables 2) conception de l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie 3) expérimentation et 4) analyse *a posteriori* et de l'évaluation.

Ainsi, un maître de maths qui prépare sa séance sur le thème de la masse volumique va effectuer lors d'une phase initiale des analyses préliminaires afin de répondre aux objectifs visés du cours, en gérant le temps et en prenant compte des difficultés et des obstacles épistémologiques ou empêchements ontogénétiques des élèves – une didactique générale et classique. Concrètement, l'enseignant pourrait prévoir du temps durant le cours afin de constater les difficultés spécifiques des élèves, par exemple ceux qui ont des lacunes sur les conversions d'unité, ce qui le déciderait éventuellement à prévoir des fiches supplémentaires pour les aider. Par la suite, lors de la deuxième phase, l'enseignant élabore sa séance selon les variables macro ou micro qui sont les variables dépendantes du contenu didactique visé – conception du projet. C'est à ce moment-là, qu'il avancerait dans la planification selon le programme scolaire, intégrerait les notions de la masse et du poids. La phase 3 quant à elle s'apparente à l'expérimentation lors de laquelle le cours sera réalisé avec les élèves en réalité et que les détails seront observés. Finalement, lors de la phase 4, l'enseignant revient sur les phases précédentes en procédant à ce qu'on appelle « l'analyse *a posteriori* et validation » qui s'appuie sur les observations réalisées des ensembles de séquence mais aussi sur les productions des élèves – une analyse spécifique. Par exemple, il se demandera pourquoi l'élève X n'a pas distinguer la différence entre l'aire et le volume d'un objet, pour quelles raisons l'élève Y a des fautes de calculs et n'utilise pas sa calculatrice malgré l'autorisation donnée, et encore comment l'élève Z a commis ce type d'erreur, etc.

Le but de l'ingénierie didactique en mathématiques est de « (…) réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves » (Douady, 1994, cité dans Artigue, 1990, s.p.), ce denier évoluant avec l'interaction prof-élève. D'une certaine manière, nous pouvons imaginer que nous sommes actuellement formellement dans la phase 1 puisque nous sommes seulement dans le cadre conceptuel – étape préliminaire. Toutefois, nous sommes probablement déjà confrontés aux difficultés et aux dysfonctionnements de la didactique classique appliquée au thème de l'algèbre, ce qui correspond également à la troisième et dernière phase. En effet, nous cherchons les facteurs différents ou similaires dans les manuels (l'objet) qui peuvent provoquer des erreurs dans le processus de la didactique des mathématiques. Cela peut alors nous mener vers des nouveaux concepts, en élaborant les activités démontrant l'interaction professeur-élève afin de déceler les processus d'apprentissage sous-jacents.

Problématique et hypothèses

Après avoir introduit la description de notre thématique et notre cadre conceptuel, nous sommes capables de formuler une problématique qui nous guidera lors de ce travail. Celle-ci peut être mentionnée comme suit : dans quelle mesure les différences et les limites entre les manuels officiels d'enseignement de maths, spécifiquement en algèbre – suisses et iraniens – ont une influence sur l'apprentissage des élèves ?

A cela, nous formulerons l'hypothèse première (hypothèse 1) qu'il y a bel et bien des différences entre les deux manuels et que par conséquent, la matière n'est pas enseignée de la même manière. Plus précisément (hypothèse 1.A), la matière ne serait pas vue pour la première fois au même moment.

Cela aurait comme effet (hypothèse 2) une influence sur l'apprentissage des élèves puisque le dispositif d'enseignement est adapté en Iran à l'univers cognitif des élèves. Ces derniers ne se sentent donc pas chargés cognitivement par des nouveaux objets puisqu'ils ont déjà une base préalable (rapports objet-personne), ce qui leur donne plus de motivation grâce à leur facilité.

Méthodologie

Afin de corroborer ou de réfuter nos hypothèses, nous allons nous appuyer sur une certaine méthodologie que nous allons présenter dans cette partie.

De prime abord, nous allons analyser le manuel suisse de mathématiques de 11ème Harmos en nous focalisant sur la résolution d'équations du premier degré à une inconnue à l'aide des règles d'équivalence. En effet, le but étant d'effectuer une analyse comparative avec ceux d'Iran, il est nécessaire de circonscrire un cadre de recherche. Ainsi, nous avons considéré les exercices suivants dans le chapitre d'équations : FA254, FA255, FA256, FA268, FA275, FA276 et FA282 … FA283, à savoir 68 exercices. Nous allons répertorier ensuite les organisations praxéologiques en utilisant le modèle d'analyse de la TAD (théorie anthropologique de didactique) de Yves Chevallard.

Lors d'une deuxième étape, nous nous intéresserons aux manuels iraniens de 9ème et 10ème puisque les types de tâches considérés similaires à ceux des manuels suisses de 11ème se trouvent uniquement dans ces manuels. Nous avons considéré 28 exercices qui ont été renommés afin de simplifier sa compréhension, en appliquant le même processus d'analyse de la TAD afin de garantir une cohésion scientifique à notre étude.

Troisièmement, s'enclenchera la phase dite comparative lors de laquelle nous comparerons les éléments listés précédemment afin de déterminer les différences et les similitudes des deux manuels.

Une fois la comparaison effectuée, il sera temps d'analyser les caractéristiques qui en ressortent afin de corroborer ou réfuter dans une certaine mesure nos hypothèses.

Corpus d'analyse

Analyse des manuels de Suisse et d'Iran avec la TAD

Nous avons appliqué le modèle d'analyse praxéologique au thème de l'algèbre afin de procéder à l'analyse du chapitre « Fonctions et algèbres » du manuel suisse de 11ème Harmos et des manuels iraniens de 9ème et 10ème. Dans ce chapitre, nous avons sélectionné les exercices *déclarés* comme résolution des équations du premier degré à une inconnue. En revanche, dans cette analyse, nous n'avons pas considéré la résolution de problèmes à l'aide d'équations (les fiches de ce chapitre, que sais-je, faire le point, résoudre à l'aide de représentations graphiques, etc.) par volonté de restreindre le cadre de recherche dans une visée systématique. Ce choix a été motivé par deux principales raisons. Premièrement, la traduction d'une langue à l'autre peut générer de la complexité pour l'analyse d'autant plus lors d'exercices de type situation-problème où le sens premier risque d'être perdu à travers la traduction. Deuxièmement, il est difficile de trouver un nombre conséquent de situation-problème identique aux deux manuels, ce qui péjorerait l'analyse comparative. C'est pourquoi, nous avons décidé d'opter pour les exercices de résolution d'équations du premier degré, nous permettant une analyse plus rigoureuse avec la TAD.

A noter également que des difficultés pouvant influencer la résolution d'équations par les élèves, telles que leurs difficultés avec les calculs décimaux, les fractions, les développements et/ou la rédaction des expressions, ont été délibérément ignorées. Ainsi, les différences et points communs qui seront relevés au travers de cette analyse porteront uniquement sur les manuels et non sur les influences du contexte propre à la société en question (suissesse ou iranienne) sur le processus de résolution des équations, telles que l'entourage des élèves, la politique actuelle, les ressources financières à disposition (pour se payer un cours privé), etc. Ces obstacles bien que présents dans la réalisation de types de tâches ne seront pas pris en compte dans le cadre de cette analyse qui se limite à l'objet-manuel et non aux personnes-élèves, bien qu'intéressant à étudier dans le cas d'une autre étude. *In fine*, le but de cette présente analyse concerne la construction du savoir ; analyser des tâches pour comprendre comment les élèves construisent leur savoir à travers lesdites tâches. Pour ce faire, nous avons procédé par l'analyse praxéologique suivante – les couleurs se référant aux tableaux d'observation des manuels, situés en annexe.

Analyse praxéologique

Les activités proposées dans les manuels suisses et iraniens peuvent être analysées avec la praxéologie de TAD à l'aide de l'organisation praxéologique définie par Yves Chevallard. Dans notre cas, nous considérons cette dernière sous la forme suivante :

Une organisation praxéologique est O = [T/τ / θ/ Θ] où

T est un type de tâches : { Résoudre une équation du premier degré à une inconnue }

τ est une technique (une manière de faire)

θ est la technologie qui justifie la technique

Θ est cette qui fait exciter la technologie (ici c'est théorie d'Algèbre)

Nous rédigeons nos analyses des exercices considérés dans les deux manuels avec [T/τ / θ/ Θ] en postulant 7 différentes praxéologies :

1) [$T0$ / $\tau0$/ $\theta0$ / Θ] où

T_0 : résoudre une équation du premier (ou deuxième) degré à une inconnue

τ_0 : tâtonnement en remplaçant la valeur particulière

θ_0 : la technologie est la définition d'une égalité

Θ : la théorie de l'algèbre ex : $3 + x = 15$ ex : $x^2 + 1 = 0$

2) [$T1$ / $\tau 1$/ $\theta 1$ / Θ] où

T_1 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue sous forme de **ax = b** où le coefficient **a** est non nul

τ_1 : diviser de chaque côté de l'égalité par le coefficient de **a**

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre ex : $4x = 32$

3) [$T2$ / $\tau 2$/ $\theta 1,2$/ Θ] où

T_2 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue sous forme **ax + b = c** où a et b sont non nuls

τ_2 : ajouter **-b** de chaque côté de l'égalité

τ_1Si (c - b) $\neq 0$ puis technique de τ_1

0Si (c - b) =0 donc x = 0 est la seule solution

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre ex : $4x -7 = 3$

4) [$T3$ / $\tau 3$/ $\theta 1,2$/ Θ] où

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue sous forme de **ax +b = cx + d** où a, b, c sont non nuls

τ_3 : Ajouter **-b** puis **-cx** puis diviser de chaque côté de l'égalité par (a - c)

τ_1Si (a - c) ≠ 0, alors si (d – b) ≠ 0 on se ramène à τ_1

ex : 3x+2=5x+3

Ø Si (a - c) = 0, alors si (d – b) ≠ 0 pas de solution

ex : 3x+2=3x+3

0Si (a - c) ≠ 0 alors si (d – b) = 0 donc x = 0 est la seule solution

ex : 3x+2=5x+2

∞Si (a - c) = 0, alors si (d – b) = 0 donc c'est vrai pour toutes les valeurs de x où il y a une infinité de solution

ex : 3x+2=3x+2

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation et/ou

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre

5) [$T4$ / $\tau4$ / $\theta1, 2$/ Θ] où

T_4 : résoudre une équation sous forme de **ax +b = cx** où a, b et c sont non nuls

τ_4 : Ajouter **-cx** puis **-b** à chaque côté de l'égalité

τ_1 Si (a - c) ≠0 donc on se ramène à τ_1. ex : 3x +2 = 2x

Ø Si (a - c) = 0 donc pas de solution. ex : 3x+2 = 3x

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre

6) [$T5$ / $\tau5$ / $\theta3$/ Θ] où

T_5 : résoudre une équation *produit nul, ex :* (3x +2)(x – 5) = 0

τ_5 : pour résoudre une équation *produit nul*,

on écrit A×B=0 ⇔ A=0 ou B=0. On résout ensuite chacune des équations A=0 et B=0 séparément. Les solutions obtenues en résolvant ces deux équations sont celles de l'équation initiale par exemple τ_2

Ex : (3x +2)(x – 5) = *0* ⇔ (3x +2) = *0 ou* (x – 5) = *0*

Ex : x (x – 1) = 0 ⇔ x = 0 ou x – 1 = 0

θ_3 : la technologie est la propriété d'équation produit nul

Θ : la théorie de l'algèbre

7) [$T6$ / $\tau6$ / $\theta3$/ Θ] où

T_6 : résoudre une équation du second degré sous forme d'une équation « produit nul »

τ_6 : pour résoudre une équation dégrée deux qui peut ramener à un type d'équation produit nul (il est parfois nécessaire de factoriser ou simplifier avant d'obtenir une telle équation) puis en résolvant deux équations du premier degré

Ex : x^2 – x = 0 factorise x => x (x – 1) = 0 et en se ramène en τ_5

θ_3 : la technologie est la propriété d'équation produit nul

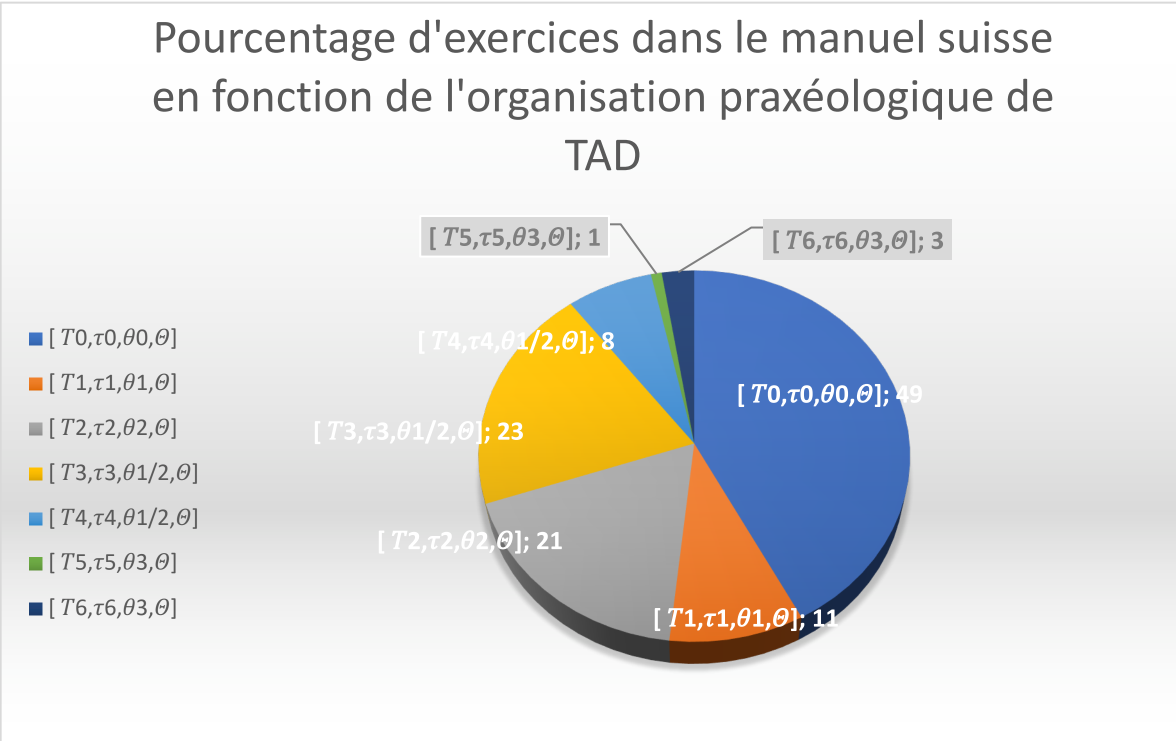
Θ : la théorie de l'algèbre

N.B : la résolution d'équation sous forme de $ax = cx$ n'est pas considérée puisque figure qu'une seule fois dans l'ensemble des exercices des deux manuels.

Observations

Manuel suisse

Dans le tableau situé en annexe, nous avons répertorié tous les exercices observés des manuels suisses en fonction de la technique (τ) de résolution d'équation proposée aux élèves dans le cadre de l'enseignement et le type de tâches (T). Ce tableau présente une colonne et une ligne de somme afin d'obtenir le nombre des types de tâches (T) proposés aux élèves et le nombre des techniques qui sont susceptibles d'être utilisées (τ) par les élèves.

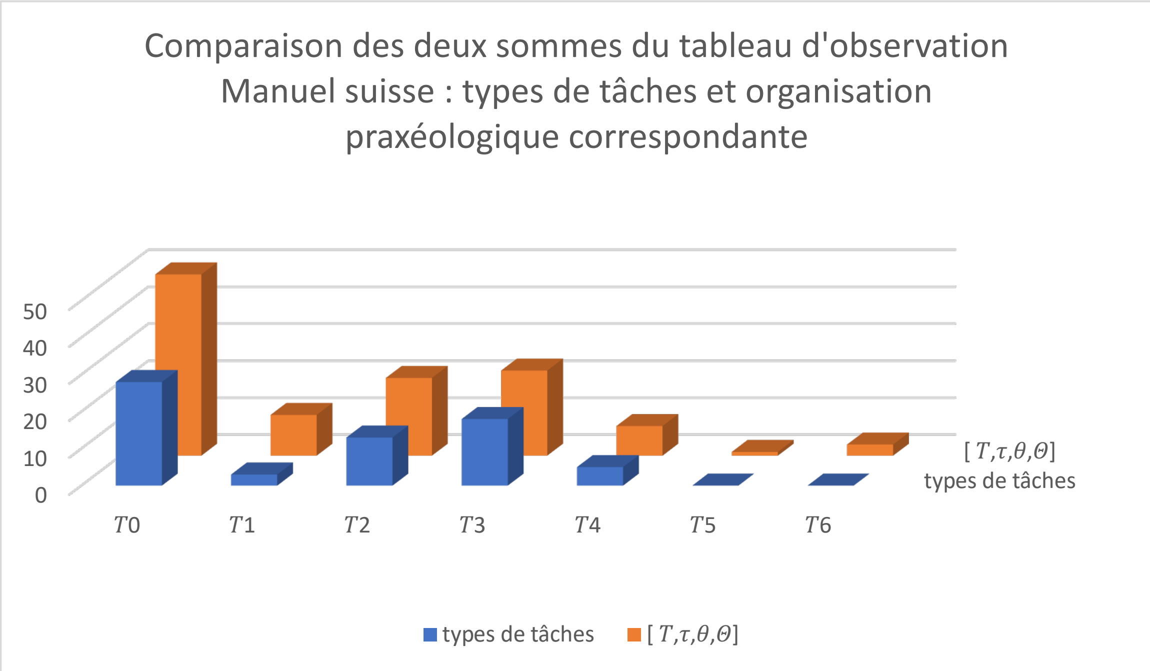


Le graphique ci-dessus présente le pourcentage d'exercices dans le manuel suisse en fonction de l'organisation praxéologique de TAD. Il est loisible de constater que 42% des exercices peuvent être résolus par l'organisation praxéologique [$T0$ / $\tau0$/ $\theta0$ / Θ]. Cela signifie que la majeure partie des exercices pris en compte dans cette analyse est susceptible d'être résolue par tâtonnement bien que ce ne soit pas toujours explicitement mentionné dans les consignes. En effet, dans certains exercices il est demandé de procéder par tâtonnement (ex : Fa256 : « résous ces équations mentalement ») alors que dans d'autres, l'énoncé ne mentionne pas le mot tâtonnement ou mentalement (ex : Fa254 : « résous ces équations »). Dans ce dernier cas, il est toutefois possible pour l'élève de choisir cette technique de tâtonnement afin de trouver les solutions.

Nous remarquons que l'organisation praxéologique [$T2$ / $\tau2$/ $\theta1{,}2$/ Θ] et [$T3$ / $\tau3$/ $\theta1{,}2$/ Θ] recouvrent quasiment le même pourcentage important. Cela signifie que qu'une certaine partie des exercices des manuels suisses exige de la part des élèves de recourir à ces organisations praxéologiques afin de résoudre les équations.

A contrario, le graphe nous montre que les élèves sont peu invités à utiliser l'organisation praxéologique [$T1$ / $\tau1$/ $\theta1$ / Θ] et [$T4$ / $\tau4$ / $\theta1, 2$/ Θ]. Les techniques propres à ces organisations τ_1 et τ_4 demandent moins de réflexion dans la stratégie de résolution, contrairement aux techniques précédentes, ce qui expliquerait selon nous sa sous-représentation.

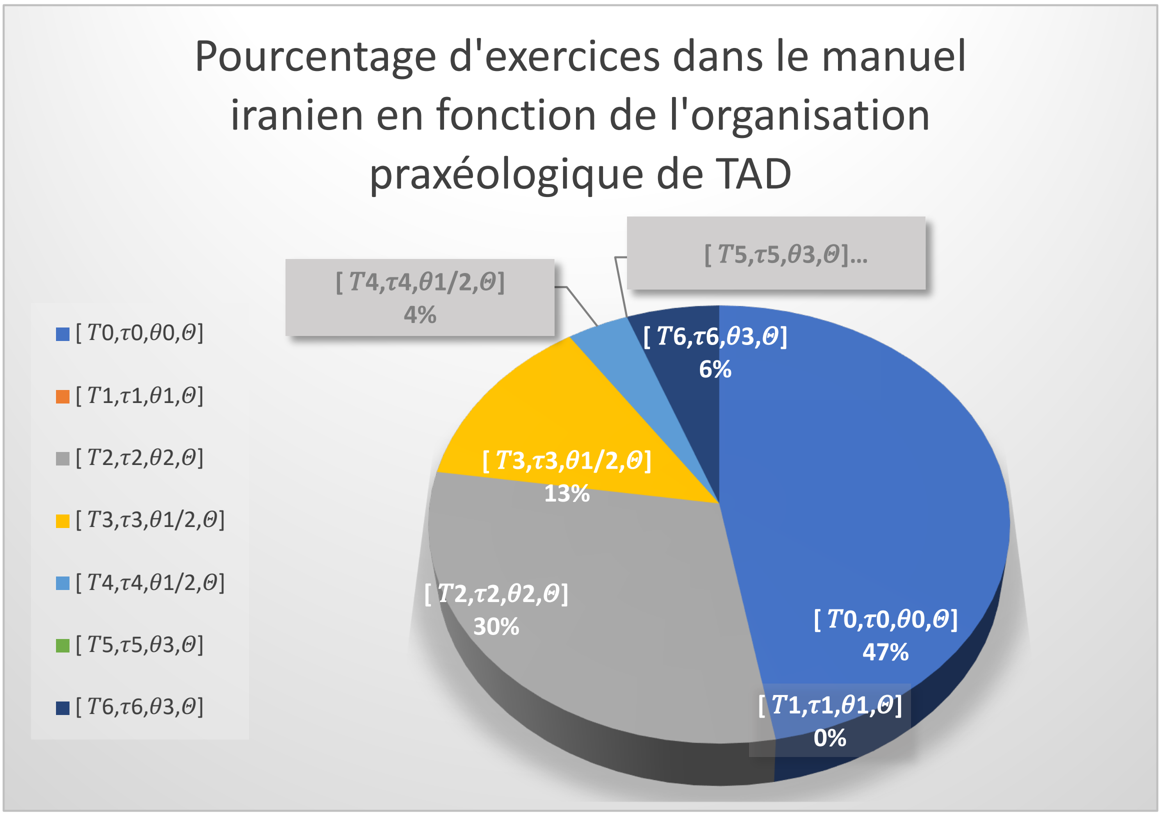
Finalement, les organisations praxéologiques [$T5$ / $\tau5$ / $\theta3$/ Θ] et [$T6$ / $\tau6$ / $\theta3$/ Θ] sont les moins représentées dans le manuel suisse puisque trois exercices sont de type $T6$ et un de type $T5$. Cela peut être expliqué par le fait que $T6$ se rapporte aux équations du deuxième degré alors que les élèves ne sont pas encore formés à cette technique qui sera vue ultérieurement. Il s'agit donc d'une première rencontre pour l'élève bien qu'il puisse procéder par tâtonnement/mentalement.



Ce graphique permet de comparer les deux sommes du tableau d'observation du manuel suisse en présentant les types de tâches et l'organisation praxéologique correspondante. Plus précisément, les colonnes bleues désignent le nombre d'exercices où il est demandé explicitement de procéder avec une méthode (par exemple, « résous mentalement/par tâtonnement ces équations) et les colonnes orange présentent l'utilisation effective possible par les élèves. Ainsi, en considérant le tâtonnement ($T0$), on remarque que 28 exercices demandent d'utiliser la méthode de tâtonnement pour résoudre l'équation alors que 49 exercices permettent son utilisation par l'élève même si cela n'est pas explicitement mentionné dans l'énoncé.

D'une manière générale, nous remarquons le constant décalage entre la colonne orange et bleue pour toutes les organisations praxéologiques, ce qui sous-entend que les élèves doivent choisir une ou plusieurs stratégies dans le processus de résolution d'équation. Dans certains exercices les élèves sont d'ailleurs obligés de mobiliser plusieurs techniques en les croisant, ce qui explique cette différence de longueur entre les deux colonnes.

Manuels iraniens



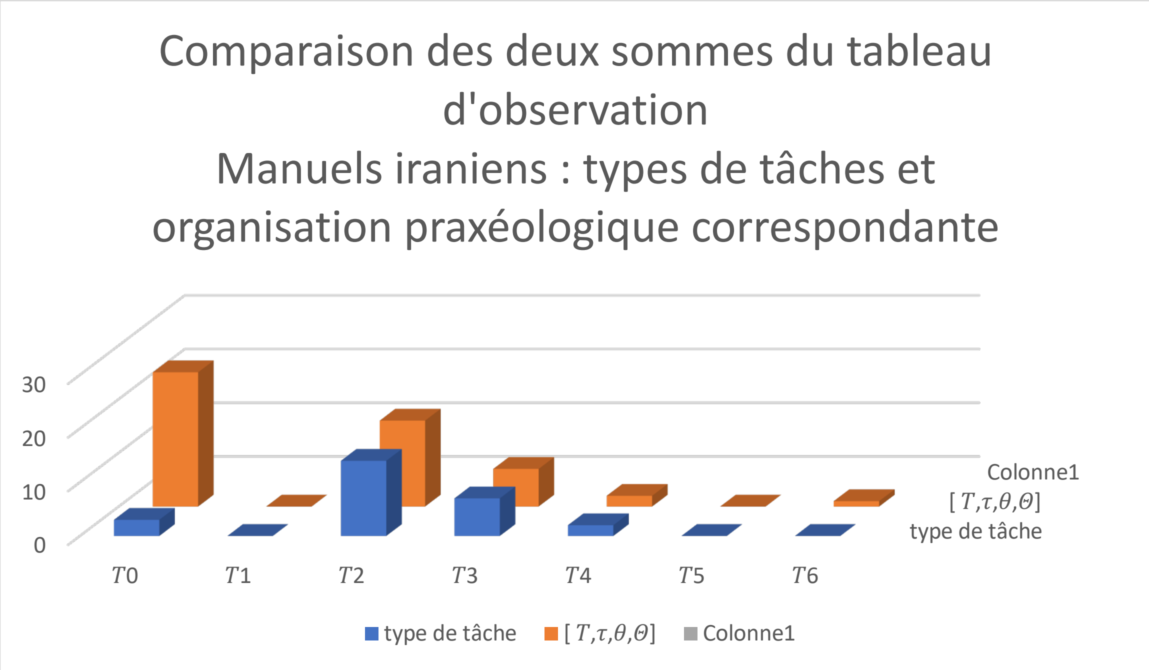
Le graphique ci-dessus présente le pourcentage d'exercices dans les deux manuels iraniens en fonction de l'organisation praxéologique de TAD. Il est loisible de constater que 47% des exercices peuvent être résolus par l'organisation praxéologique [$T0$ / $\tau0$/ $\theta0$ / Θ]. Cela signifie que la majeure partie des exercices pris en compte dans cette analyse est susceptible d'être résolue par tâtonnement bien que ce ne soit pas toujours explicitement mentionné dans les consignes. En effet, dans certains exercices il est demandé de procéder par tâtonnement (ex : 9C3P37Ta : « résous ces équations mentalement ») alors que dans d'autres, l'énoncé ne mentionne pas le mot tâtonnement ou mentalement (ex : 9C3P38Te : « résous ces équations »). Dans ce dernier cas, il est toutefois possible pour l'élève de choisir cette technique de tâtonnement afin de trouver les solutions.

Nous remarquons également que l'organisation praxéologique [$T1$ / $\tau1$/ $\theta1$ / Θ] est nulle. Cela ne signifie pas que les élèves ne l'utilisent pas ; ils ont recours au $T1$ au milieu du processus de résolution. C'est pourquoi dans le tableau nous l'avons mentionné avec τ_1 en vert. Ainsi, quasiment tous les exercices déclarés de type $T2$ exigent de la part des élèves de mobiliser durant le processus la technique τ_1.

Nous remarquons que l'organisation praxéologique [$T2$ / $\tau2$/ $\theta1{,}2$/ Θ] recouvre un pourcentage important s'élevant à 30%. Cela signifie que qu'une certaine partie des exercices des manuels iraniens exige de la part des élèves de recourir à cette organisation praxéologique afin de résoudre les équations. A l'inverse de l'organisation praxéologique [$T3$ / $\tau3$/ $\theta1{,}2$/ Θ] qui est moins mobilisée dans les manuels iraniens. Sachant que les manuels iraniens observés équivalent aux manuels de 9ème et 10ème de Suisse, il nous semble que c'est pour éviter les complications dans le processus d'équation.

La représentation graphique nous montre que les élèves sont peu invités à utiliser l'organisation praxéologique [$T4$ / $\tau4$ / $\theta1, 2$/ Θ]. Les techniques propres à cette organisation τ_4 demandent moins de réflexion dans la stratégie de résolution, contrairement aux techniques précédentes, ce qui expliquerait selon nous sa sous-représentation.

Finalement, les organisations praxéologiques [$T5$ / $\tau5$ / $\theta3$/ Θ] et [$T6$ / $\tau6$ / $\theta3$/ Θ] sont les moins représentées dans les manuels iraniens puisqu'un seul exercice est de type $T6$ et aucun de type $T5$. Cela peut être expliqué par le fait que $T6$ se rapporte aux équations du deuxième degré alors que les élèves ne sont pas encore formés à cette technique qui sera vue ultérieurement. Il s'agit donc d'une première rencontre pour l'élève bien qu'il puisse procéder par tâtonnement/mentalement – sachant en outre qu'il est en 9ème ou 10ème année.



Ce graphique permet de comparer les deux sommes du tableau d'observation des manuels iraniens en présentant les types de tâches et l'organisation praxéologique correspondante. Plus précisément, les colonnes bleues désignent le nombre d'exercices où il est demandé explicitement de procéder avec une méthode (par exemple, « résous mentalement/par tâtonnement ces équations ») et les colonnes oranges présentent l'utilisation effective possible par les élèves. Ainsi, en considérant le tâtonnement $T0$, on remarque que 3 exercices demandent d'utiliser la méthode de tâtonnement pour résoudre l'équation alors que 25 exercices permettent son utilisation par l'élève, même si cela n'est pas explicitement mentionné dans l'énoncé.

Il est loisible de constater un très net décalage entre la colonne orange et bleue pour l'organisation praxéologique $T0$. Cela peut sous-entendre que les élèves n'ont pas besoin de mobiliser telle technique pour tel type de tâche mais peuvent, dans la majorité du temps, résoudre les équations par la technique de tâtonnement. Dans les autres cas, nous remarquons une harmonie dans la hauteur des colonnes. Ainsi, un type de tâche demande d'effectuer la même technique correspondante.

Analyse comparative

Au regard des observations préalablement effectuées, nous remarquons une certaine similitude dans la répartition des organisations praxéologiques dans le manuel suisse et les manuels iraniens. Par ailleurs, dans les deux cas, la partie la plus conséquente concerne $T0$ et donc la technique du tâtonnement bien qu'elle soit légèrement supérieure dans le manuel iranien (47% pour 42%). Une autre ressemblance concerne la sous-représentation de $T5$ et $T6$ qui correspondent aux techniques de résolution des équations du deuxième degré. Toutefois, sachant que les manuels iraniens considérés sont l'équivalent de la 9ème Harmos (soit deux ans académiques inférieurs au manuel suisse analysé), cela pourrait signifier qu'au niveau de la construction du savoir, les manuels iraniens insistent plus tôt sur les équations du degré 2.

Une différence notable concerne le manque de $T1$ dans les manuels iraniens bien que dans le processus de résolution d'équation dans d'autres types de tâches, les élèves sont amenés à l'utiliser. En outre, il est intéressant de constater, à la vue du deuxième graphique, les différences en termes de décalage. Alors que du côté du manuel suisse, les décalages sont constants entre le type de tâche et l'organisation praxéologique témoignant d'une mobilisation variée des techniques d'un exercice à l'autre, du côté des manuel iraniens, le net décalage concerne plus fortement le $T0$ alors que les autres colonnes conservent une certaine harmonie.

Cela nous permet de corroborer l'hypothèse 1 formulée préalablement, à savoir qu'il existe des différences entre le manuel suisse et les manuels iraniens. En effet, dans le manuel suisse, le type d'organisation praxéologique exige différentes techniques et entraîne les élèves à les croiser pour résoudre les équations, développant ainsi leur univers cognitif *U(x)*. En effet, dans la majorité des exercices présentés, les élèves sont amenés à utiliser T1, comme le confirme le tableau. D'un point de vue cognitif, le manuel en tant qu'Institution *(I)* construit un monde familier pour l'élève *(x)*. Ainsi, l'univers cognitif *U(x)* de l'élève se construit progressivement avec ce type d'exercices, favorables à son apprentissage. Grâce à cette progression, l'élève *(x)* connaît l'objet-exercice *(o)* à travers ce manuel *(I)* et son univers cognitif *U(x)* est non vide. Par ailleurs, la première rencontre avec les équations dans le manuel se déroule en 10ème, soit plus tardivement en comparaison aux manuels iraniens analysés.

En effet, les élèves utilisant les manuels iraniens ont eu leur première rencontre avec la résolution d'équations dès la 9ème année. Cette rencontre est caractérisée par des exercices moins complexes dans les équations qui ne nécessitent pas une diversité de techniques ; ces derniers peuvent très souvent être résolus par tâtonnement/mentalement. Cette première rencontre facilitée articule une bonne connaissance du thème permettant de l'appréhender sans grande difficulté puisqu'en se concentrant sur peu de techniques. Cela conduit les élèves à donner du sens à la résolution des équations afin de trouver le raisonnement adéquat. Ainsi, nous pourrions postuler que le manuel iranien travaille l'épaisseur de l'équipement praxéologique des élèves qu'ils développent au fur et à mesure. Nous pouvons constater cette épaisseur de l'équipement praxéologique dans la diversité des exercices de type développement, réduction, factorisation et distributivité simple et complexe d'une expression littérale – déjà connus par les élèves depuis la 9ème comme l'attestent ces manuels iraniens. Il y a en effet davantage d'exercices de ce type que de résolutions d'équations, à l'inverse du manuel suisse qui propose bon nombre d'exercices sous forme « résous l'équation ». De ce fait, nous pourrions postuler qu'une personne *(x)* avec un bon équipement praxéologique sera ainsi équipé lorsqu'elle sera confrontée à un objet *(o)* encore inconnu – n'existant pas dans son univers cognitif *U(x)*.

En reprenant la théorie du TAD de Chevallard, cette dernière mentionne l'importance de l'équipement praxéologique et de l'univers cognitif dans la connaissance des élèves. De cette manière, nous pouvons dans une certaine mesure corroborer notre hypothèse 2 selon laquelle il y a une influence sur l'apprentissage des élèves de la part de deux didactiques différentes proposées par les manuels. Toutefois, nous ne pouvons pas, au niveau de notre étude, statuer sur une méthode plus efficace que l'autre pour l'apprentissage des élèves.

Finalement, bien que cette étude à ce niveau ne puisse statuer sur le meilleur manuel, elle nous permet en somme de considérer comment le concevoir. En effet, ce présent mémoire dévoile une vision importante de la construction du savoir des élèves à travers le type de tâches, allant au-delà de la partie visible de l'iceberg. En effet, grâce à cette analyse praxéologique, nous parvenons à prendre connaissance d'une partie de cet iceberg immergé et son influence sur la solidité du savoir des élèves. Nous avons ainsi appréhendé les organisations praxéologiques en mettant un point d'orge aux types de tâches et aux techniques en vue de déterminer la didactique adaptée aux élèves, car il est essentiel d'être dans une position réflexive et de prendre en compte la relativité des formes de connaissances ; essayer de mettre en transparence des parties immergées de l'iceberg afin de découvrir la solidité ou la faiblesse qu'elles confèrent à la partie émergée. Pour reprendre les mots de Chevallard (ARDM, s.d.), c'est cette volonté de rupture épistémologique, cette ouverture et ce besoin de comprendre, qui permettent en somme de considérer, sous toute ses dimensions, l'enjeu didactique.

Analyse critique

Distance critique

Le sujet de notre recherche étant de prime abord très vaste, nous nous sommes retreints au chapitre algèbre et plus précisément à la résolution d'équation du premier degré des manuels iraniens et du manuel suisse, en excluant certains exercices afin de rendre notre recherche réalisable. Il est donc important de considérer cette limite quant à l'inférence de nos résultats. En effet, nous n'avons pas pris en compte la résolution des équations à travers les graphiques, les fractions et la résolution de problèmes en lien avec les fonctions et l'algèbre. Concernant ce dernier point, nous étions face à une limite culturelle dans la comparaison d'un manuel à l'autre. Par exemple, certains problèmes qui font sens aux élèves suisses (ex : distinguer la fonction linéaire et affine à travers l'achat des billets de cinémas individuels ou par abonnement) ne le font pas pour les élèves iraniens puisque pour des raisons politiques et sociales, l'abonnement n'existe pas et que certains élèves – notamment les filles – ne sont pas encouragés à s'y rendre.

En outre, nous avons sélectionné les types de tâches du manuel de 11ème Harmos suisse et ceux des manuels iraniens de 9ème et 10ème afin de les comparer par la praxéologie de TAD. En effet, dans le manuel iranien de 11ème, les exercices de type « résolution d'équation » n'existent pas. Cela nous a tout de même permis d'analyser le décalage en termes de première rencontre dans les manuels avec les équations.

Une autre limite est que nous avons omis dans notre observation les différents niveaux qui existent en Suisse (VG ou VP, niveau 1 et niveau 2, etc.), considérant ainsi le manuel suisse sans faire de distinction et de manière généralisée. Concernant les manuels iraniens, nous ne pouvons statuer sur la présence d'éventuels niveaux, bien que 20 ans en arrière, il n'en existait pas.

Limites propres à la méthodologie et au contexte

Cette recherche s'est effectuée entièrement à distance puisque s'appuyant exclusivement sur les manuels officiels des deux pays considérés pour l'analyse. En effet, le sujet de recherche ne nous permettait pas d'étudier les élèves, qui sont néanmoins au centre de la didactique des mathématiques.

En outre, dans cette même veine, il était impossible d'avoir accès aux autres dispositifs proposés par les professeurs, plus particulièrement ceux résidant en Iran. De plus, sachant que chaque enseignant est libre de proposer divers dispositifs pour l'apprentissage des élèves (fiches supplémentaires, activités, situations-problème, etc.), nous ne pouvions pas appréhender cette richesse et cette variété, bien qu'elle appartienne à la partie immergée de l'iceberg du savoir.

En outre, cette impossibilité d'effectuer une analyse comparative sur le terrain nous a empêché de considérer *l'espace de l'étude* (Chevallard, s.d.) qui a toutefois une importance prépondérante quant à l'apprentissage des élèves.

Conclusion

Apports de la recherche

Nous avons commencé ce présent travail avec plusieurs questionnements et interrogations naissant de notre curiosité à propos de la crainte et du découragement que nous rencontrons parfois chez certains élèves, dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en Suisse. De cette interrogation sur les raisons de ce désintérêt, nous avons pris comme cadre d'étude les différences entre les manuels de mathématiques suisses et iraniens en considérant les équations degré 1 dans le chapitre d'algèbre de 11ème Harmos.

En procédant par l'analyse praxéologique de TAD, nous avons eu l'opportunité de constater les différences et les similitudes au niveau des manuels, en analysant les organisations praxéologiques, permettant ainsi de porter un regard sur ce dispositif d'enseignement officiel dans deux pays différents. Il est apparu que la répartition des tâches était dans une certaine mesure similaire d'un manuel à l'autre et que la technique du tâtonnement occupait une place prépondérante. Des différences ont également été relevées ; alors que le manuel suisse encourage le passage d'une technique à une autre dans la résolution des équations, le manuel iranien propose des équations plus simples nécessitant rarement un croisement des techniques.

Cette analyse comparative nous a amené à repérer différents choix didactiques de la part des manuels, puisque le premier favorise l'univers cognitif de l'élève et l'autre l'invite à développer l'épaisseur de son équipement praxéologique. Par la pluralité des techniques proposées à travers les tâches de résolution d'équations dans le manuel suisse *(I)*, l'élève *(x)* connaît l'objet-exercice *(o)* et son univers cognitif *U(x)* devient non vide. *A contrario*, la didactique propre aux manuels iraniens incite l'élève *(x)* à développer un bon équipement praxéologique afin d'être équipé lorsqu'il sera confronté à un objet *(o)* encore inconnu – n'existant pas dans son univers cognitif *U(x)*.

Cette analyse, dépassant la simple recherche de la meilleure méthode ou du manuel le plus approprié, ouvre un regard sur les dispositifs disponibles pour visualiser, telle une loupe, où l'exercice est situé, à quel moment l'élève rencontre un exercice, pour quelle raison et comment un manuel officiel peut l'aider ou le guider pour poursuivre son apprentissage à travers ce type d'exercices.

Ce faisant, elle nous conduit finalement à réfléchir à la construction du savoir des élèves et par voie de conséquence à la *reconstruction* de l'enseignement. En effet, la didactique est « enseigner, faire savoir » ; elle est une scène que l'enseignant propose pour que les élèves réussissent leur rôle d'apprenant. Mais quels dispositifs amener et à quels **moments didactique**s (Chevallard, s.d.) les proposer ? Est-ce qu'il serait idéal de réduire le nombre d'exercices et la diversité des techniques en vue d'approfondir davantage l'équipement praxéologique, ou au contraire, accentuer cette diversité afin de conduire les élèves à dynamiser davantage leur univers cognitif ? Qu'est-ce qui empêche le rassemblement de ces deux didactiques afin de reconstruire notre enseignement (partie immergée de l'iceberg) en vue d'assurer des fondements solides aux savoirs des élèves (partie émergée de l'iceberg) ? Finalement, ces questionnements « imposent sans délai d'ouvrir un immense chantier » (Chevallard, s.d., p. 20), celui de la refondation de la didactique des mathématiques.

Prolongement de la recherche

Les pistes proposées pour poursuivre cette analyse en incluant ces nouveaux questionnements, bien que vastes et chronophages, possèdent un potentiel très riche.

Afin de rendre transparent les fondements de l'iceberg de la construction du savoir des élèves, il est indispensable de considérer le principal concerné, à savoir les élèves. De prime abord à travers une observation de ces derniers de longue durée sur le terrain – à la fois en Iran et en Suisse – face à l'objet considéré (les équations). C'est seulement en observant la résolution d'exercices de vrais élèves ainsi que les techniques employées par ces derniers que nous serons capables, *in fine*, d'appréhender la didactique, seule « dimension du réel social » (Chevallard, s.d., p.11).

En outre, il est indispensable d'étudier le système didactique propre au contexte en vigueur, et donc d'analyser les praxéologies en fonction de leur **paysage social** (Chevallard, s.d.). En effet, il est prouvé que le contexte possède une influence très importante sur l'apprentissage des élèves. De ce fait, il apparaît nécessaire, afin d'approfondir cette étude, de considérer les enjeux politiques et sociaux des deux pays, et leurs conséquences sur les problèmes sociocognitifs.

Il serait par la suite intéressant de proposer des exercices suisses à des élèves d'Iran et inversement afin de comparer les résultats. Cela nous permettrait d'analyser les différences en termes d'équipement praxéologique et d'univers cognitif ; comment un élève iranien de 9ème année procède afin de résoudre des équations des manuels de 11ème Harmos suisses ? Dans quelle mesure, les élèves de Suisse et d'Iran s'adaptent à d'autres dispositifs d'enseignement ? A quelles difficultés sont-ils confrontés ?

En outre, parallèlement à cette analyse, il apparaît judicieux d'obtenir le feedback des élèves à travers le questionnement métacognitif afin de comprendre, d'une autre manière, leurs processus de construction du savoir.

Si la recherche s'avère prometteuse, il serait intéressant d'avoir une vision globale des manuels du cycle 3 et de leur construction, en considérant en détail le chapitre « fonctions et algèbre » et cette fois-ci, sans exclure des exercices. Cela nous permettrait notamment de remarquer de nouvelles similitudes dans les exercices présentés dans les manuels (Annexe : Ressemblances entre deux exercices des manuels de 9ème d'Iran et de Suisse).

In fine, il appert que cette étude soit un terreau fertile pour considérer l'importance de la place des manuels et surtout, de réfléchir d'une manière générale aux dispositifs didactiques en mathématiques. En somme, c'est une invitation au travail continu puisque c'est en élargissant le champ d'analyse des phénomènes didactiques (Wozniak et al., s.d.) que nous serons capables de construire et *reconstruire* des dispositifs appropriés pour accompagner les élèves sur le chemin de leur apprentissage.

Bibliographie

ARDM. (s.d.). Yves Chevallard – la théorie anthropologique du didactique. Consulté en ligne le 19.04.2020 sur le site https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard-la-theorie-anthropologique-du-didactique/.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique en mathématiques.

Chevallard, Y. (1985). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *Texte issu de la conférence plénière donnée à Baeza (Espagne) en octobre 2005 dans le cadre du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*.

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. *Texte issu de la conférence plénière donnée à Toulouse le 29 avril 2009*.

Chevallard, Y. (s.d.). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Texte issu de la conférence plénière donnée à Marseille*.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. Consulté en ligne le 19.04.2020 sur http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/15_article_100.pdf.

Le Blog De L'UIA, Université de Poitiers. (s.d.). El-Khawarizmi, le fondateur de l'Algèbre et des Algorithmes. Consulté en ligne le 09.06.2019 sur http://ll.univ-poitiers.fr/llappli/wordpress/el-khawarizmi-le-fondateur-de-lalgebre-et-des-algorithme/#:~:text=Al%2DKhawarizmi%2C&text=Son%20apport%20en%20math%C3%A9matiques%20fut,%C3%A9quations%20en%20classant%20celles%2Dci.

Musial, M., Tricot, A. et Pradere, F. (2012). L'ingénierie didactique, une démarche pour enseigner rationnellement. Consulté en ligne le 20.06.2019 sur https://www.researchgate.net/publication/258220822_L'ingenierie_didactique_une_demarche_pour_enseigner_rationnellement.

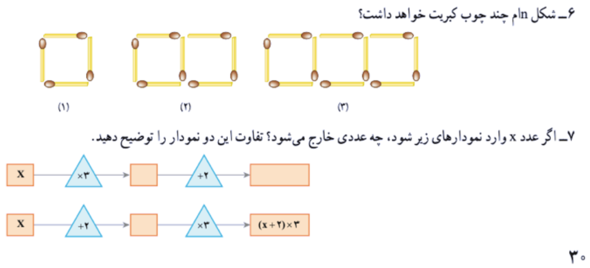
Siety, A. (2003) Mathématiques, ma chère terreur. Hachette.

Wozniak, F., Bosch, M. et Artaud, M. (s.d.). La théorie anthropologique du didactique. Consulté en ligne le 15.06.2020 sur https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard/.

Annexes

Ressemblances entre deux exercices des manuels de 9ème d'Iran et de Suisse

Iran


۶ــ شکل nام چند چوب کبریت خواهد داشت؟

(۱) (۲) (۳)

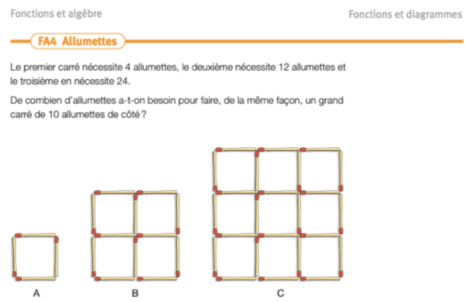
۷ــ اگر عدد x وارد نمودارهای زیر شود، چه عددی خارج می‌شود؟ تفاوت این دو نمودار را توضیح دهید.

x ×۳ +۲

x +۲ ×۳ (x+۲)×۳

۳۰

Suisse


Fonctions et algèbre — Fonctions et diagrammes

FA4 Allumettes

Le premier carré nécessite 4 allumettes, le deuxième nécessite 12 allumettes et le troisième en nécessite 24.

De combien d'allumettes a-t-on besoin pour faire, de la même façon, un grand carré de 10 allumettes de côté ?

A B C


۲ــ الف) مساحت هر دو مستطیل را با عبارت جبری نشان دهید.

۲ ۳ a a (۱) (۲)

مساحت مستطیل (۱) S۱ = مساحت مستطیل (۲) S۲ =

S= S۱ + S۲ = ____ + ____

ب) دو مستطیل را کنار هم گذاشته‌ایم. توضیح دهید مساحت این شکل چگونه به‌دست آمده است؟

S = (۲+۳)a

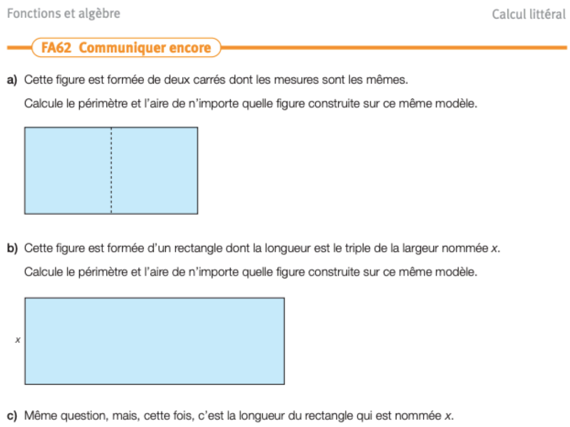
ج) پاسخ‌های الف و ب را با هم مقایسه کنید.

(۲+۳)

۳ــ مانند سؤال ۲ برای شکل زیر یک تساوی بنویسید.

a b ۵ a b ۵

توضیح دهید که با کمک تساوی بالا چگونه می‌توان یک عدد بیرون پرانتز را در جمله‌های آن ضرب کرد.


Fonctions et algèbre — Calcul littéral

FA62 Communiquer encore

a) Cette figure est formée de deux carrés dont les mesures sont les mêmes.
Calcule le périmètre et l'aire de n'importe quelle figure construite sur ce même modèle.

b) Cette figure est formée d'un rectangle dont la longueur est le triple de la largeur nommée *x*.
Calcule le périmètre et l'aire de n'importe quelle figure construite sur ce même modèle.

x

c) Même question, mais, cette fois, c'est la longueur du rectangle qui est nommée *x*.

Tableau d’observation suisse

	[T_0 / τ_0/ θ_0]	[T_1/ τ_1/ θ_1]	[T_2 /τ_2/θ_2]	[T_3 /τ_3/$\theta_{1,2}$]	[T_4 /τ_4/$\theta_{1,2}$]	[T_5 /τ_5/θ_3]	[T_6 /τ_6/θ_3]	Somme
T_0	FA256a FA256b FA256c FA256d FA256e FA256f FA256g FA256h FA256i FA256j FA256k FA256l FA256m FA256n FA256o FA256p FA275a FA275b FA275c FA275d FA275e FA275f FA275g	FA256a FA256b FA256f FA275c FA275e FA275f	FA256d FA256i FA256j FA256k FA256l FA256m FA256o FA256p	FA256g∞ FA256h FA256n Ø FA275b∞ FA275g	FA256c FA256e FA275a		FA275d FA275h τ_5	28

	FA275h FA275i FA275j FA275k FA275l	FA275j FA275l				FA275i	FA275k τ_5	
	[T_0 / τ_0/ θ_0]	[T_1/ τ_1/ θ_1]	[T_2 /τ_2/θ_2]	[T_3 /τ_3/$\theta_{1,2}$]	[T_4 /τ_4/$\theta_{1,2}$]	[T_5 /τ_5/θ_3]	[T_6 /τ_6/θ_3]	Somme
typeT$_1$	FA254a FA254i FA255a	FA254a FA254i FA255a						3
	[T_0 / τ_0/ θ_0]	[T_1/ τ_1/ θ_1]	[T_2 /τ_2/θ_2]	[T_3 /τ_3/$\theta_{1,2}$]	[T_4 /τ_4/$\theta_{1,2}$]	[T_5 /τ_5/θ_3]	[T_6 /τ_6/θ_3]	Somme
typeT$_2$	FA254b FA254f FA254j FA255c FA255e FA255f FA255h FA275e FA275f FA268i FA268j FA276a FA282b		FA254b τ_1 FA254fτ_1 FA254j τ_1 FA255bτ_1 FA255c FA255eτ_1 FA255fτ_1 FA255hτ_1 FA268i FA268j0 FA276a FA276d FA282b					13

	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
typeT_3	FA255d FA255g			FA254c $\tau 1$ FA254d $\tau 1$ FA255d ∞ FA255g Ø FA255j $\tau 1$ FA268b $\tau 1$ FA268c $\tau 1$ FA268d $\tau 1$ FA268e ∞ FA268f $\tau 1$ FA268g $\tau 1$ FA276b FA276c FA282a $\tau 1$ FA282c $\tau 1$ FA282d Ø FA282e 0 FA282f $\tau 1$				18

	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
typeT$_4$	FA268a FA255i				FA268aτ_1 FA268h Ø FA254eτ_1 FA254hτ_1 FA255i τ_1			5
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
typeT$_5$								
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
typeT$_6$								
T	FA254g			FA254g0				1
Somme	49 72.06%	11 16.18%	21 30.88%	23 33.82%	8 11.76%	1 1.47%	3 4.41%	68

Tableau d'observation iranien

9ème année : 9
10ème année : 10
Chapitre : C
Page : P
Activité /Exercice / Travail en classe : A/E/T
ex : 10C4P65A3a : 10ème année, Chapitre 4, Page 65, Activité 3a
ex : 9 C 3P37Ta : 9ème année, Chapitre 3, Page 37, Travail en classe a

	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	T_5	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
T_0	9C3P37Ta 9C3P37Tb 9C3P37Tc		9C3P37Ta 9C3P37Tb				9C3P37Tc	3
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_1								0
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_2	9C3P38Ta 9C3P38Tb 9C3P38Te 9C3P38Tf 9C3P39Ea 9C3P39Eb 9C3P39Ec 9C3P39Ed 9C3P39Ee 9C3P39Ef 9C3P40E2 10C4P65Ta 10C4P65Tb 10C4P65Tf		9C3P38Ta τ_1 9C3P38Tb τ_1 9C3P38Te 9C3P38Tf τ_1 9C3P39Ea τ_1 9C3P39Eb τ_1 9C3P39Ec τ_1 9C3P39Ed τ_1 9C3P39Ee τ_1 9C3P39Ef τ_1 9C3P40E2 10C4P65Ta τ_1 10C4P65Tb τ_1 10C4P65Tf τ_1					14
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	

typeT_3	10C4P65A3a 10C4P65A3b 10C4P65Tc 10C4P65Td 10C4P65Te 10C4P68Eb			10C4P65A3a 10C4P65A3b 10C4P65A3c 10C4P65Tc τ_1 10C4P65Td τ_1 10C4P65Te τ_1 10C4P68Eb0				7
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_4	9C3P39Eg 9C3P39Eh				9C3P39Eg 9C3P39Eh τ_1			2
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_5								0
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_6								0
T								
Somme	25 89.3%	0	16 57.14%	7 25%	2 7.14%		1 3.57%	